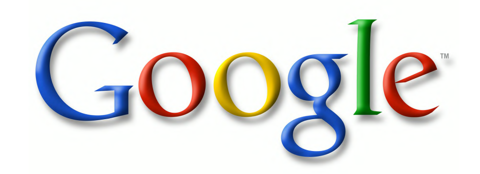





SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS

ÜBER DIE KUGELN,

WELCHE

EINE CUBISCHE RAUMCURVE

MEHRFACH ODER MEHRPUNKTIG BERÜHREN.

INAUGURAL-DISSERTATION,

DER

MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN FACULTÄT

DER

KAISER-WILHELMS-UNIVERSITÄT STRASSBURG

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT VON

(Heinrich) EMIL TIMERDING

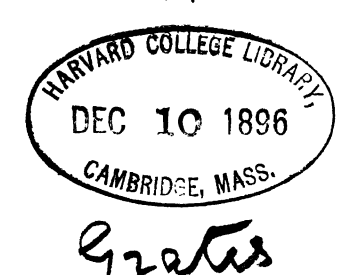
AUS STRASSBURG I/ELS.

STRASSBURG,

STRASSBURGER DRUCKEREI UND VERLAGSANSTALT,

VORM. R. SCHULTZ & C°.

1894.


HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEC 10 1896
CAMBRIDGE, MASS.

1.

So genau auch die projektiven Eigenschaften der cubischen Raumcurven erforscht sind, so wenig ist bis zum heutigen Tage von alledem bekannt, was auf ihre krümmungstheoretische Behandlung Bezug hat. Wir wissen bis jetzt so gut wie gar nichts von den doppelt berührenden, osculirenden und hyperosculirenden Kugeln, den Krümmungskreisen und Krümmungsmittelpunkten, kurz der ganzen Krümmungslehre der cubischen Raumcurve*. Dass dieselbe übrigens sehr verwickelte Krümmungsverhältnisse zeigen wird, davon überzeugt uns ein Blick auf ihre Gestalt. So fremd sie der metrischen Geometrie ist, so fremd bleibt sie auch dem betrachtenden Auge. Es fehlen ihr alle Symmetrieverhältnisse, die leichte Uebersichtlichkeit, die alle metrisch wichtigen Curven und Flächen auszeichnet.

So wäre es in der That auch wohl verfehlt, wenn man die allgemeinen Formeln der Infinitesimalgeometrie auf diese speziellen Curven anwenden wollte. Die auszuführenden Rechnungen würden voraussichtlich, je weiter wir vordringen, um so mühsamer werden und wenig Interesse darbieten. Jene Formeln lassen ja wohl die Existenz und den Charakter der abgeleiteten Curven und Flächen erkennen; aber wenn es sich um deren wirkliche Bestimmung und die Aufstellung ihrer Gleichungen handelt, so erweisen sie sich durchaus als ungeschickt. So steht man hier vor der Aufgabe, auf die man in der Mathematik so oft stösst, für den besonderen

---

*) Man vergleiche die diesbezügliche Bemerkung Herrn Reyes am Schlusse seiner Uebersicht über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntniss der cubischen Raumcurven. (Festschrift der mathem. Ges. in Hamburg, 1890, S. 43.)

Fall auch eine besondere Methode zu suchen, die ihm eigentümlich und nur auf ihn anwendbar ist. Eine solche Methode existirt in der That; sie ist von überraschender Einfachheit und führt mit Leichtigkeit zu dem angestrebten Ziele. Sie beruht auf dem Folgenden.

Durch eine cubische Raumcurve lässt sich ein Netz von ∞^2 Regel- und Kegelflächen zweiter Ordnung legen. Jede dieser Flächen enthält zwei Schaaren von Kreisen, und zwar liegen die Kreise einer jeden Schaar in parallelen Ebenen und jeder Kreis der einen Schaar lässt sich mit jedem der anderen durch eine Kugel verbinden. Die beiden Schaaren fallen nur dann zusammen, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist. Die Kreise, welche auf einer dieser Flächen liegen, haben mit der Raumcurve je 3 Punkte gemein und umgekehrt lässt sich durch jeden Kreis, welcher die Raumcurve in 3 Punkten schneidet, eine und nur eine Fläche zweiter Ordnung legen, welche zugleich die Raumcurve enthält. Wir finden also zu jedem Kreise, der durch 3 Punkte der Curve geht, erstlich eine Schaar anderer, deren Ebenen zu der des ersten parallel sind und die ebenfalls je 3 Punkte der Curve enthalten, und sodann eine zweite Schaar von Kreisen, die auch in parallelen Ebenen liegen und von denen jeder sich mit jedem Kreise der ersten Schaar durch eine Kugel verbinden lässt.

Wir werden die erste Kreisschaar zur zweiten conjugirt nennen und ebenso jede Ebene der ersten Schaar zu jeder Ebene der zweiten Schaar. Dann haben zwei so conjugirte Ebenen die Eigenschaft, dass sie die Raumcurve in 6 Punkten einer Kugel schneiden. Greifen wir aber von diesen 6 Punkten beliebige drei heraus, legen durch sie einen Kreis und ebenso durch die drei übrigen, so müssen diese beiden Kreise conjugirten Schaaren angehören, und ebenso sind die Ebenen conjugirt, in denen sie liegen. Die 6 Punkte, in denen eine cubische Raumcurve von einer beliebigen Kugel geschnitten wird, haben also die Eigenschaft, dass jede Ebene, welche drei von ihnen enthält, zu der Verbindungsebene der drei

übrigen Punkte conjugirt ist. Eine Schaar paralleler Ebenen hat eine gemeinsame unendlich ferne Gerade, und die Zuordnung zweier solcher Schaaren involvirt eine gleichzeitige Beziehung zwischen ihren unendlich fernen Geraden. So erhalten wir eine eindeutige involutorische Verwandtschaft zwischen den Geraden der unendlich fernen Ebene, und zwar schneiden je zwei Ebenen, die zwei conjugirte Gerade dieser Verwandtschaft enthalten, die Raumcurve in 6 Punkten einer Kugel.

Weiter aber können wir 6 solche Punkte auf 15 verschiedene Arten zu 3 Paaren sondern und jedes Paar durch eine Sehne verbinden. Durch zwei dieser Paare ist dann die sie verbindende Kugel und damit das dritte Paar, und durch zwei Sehnen ist die dritte Sehne jedesmal bestimmt. Diese dritte Sehne soll die Begleiterin der beiden anderen heissen. So teilen sich die Sehnen der cubischen Raumcurve in bestimmter Weise in Tripel derart, dass durch zwei Sehnen eines Tripels immer die dritte bestimmt ist. Die Endpunkte der Sehnen eines Tripels liegen allemal auf einer Kugel, und die Ebenen, welche zwei Sehnen je mit einem Endpunkte ihrer Begleiterin verbinden, sind conjugirt und laufen nach conjugirten Geraden der unendlich fernen Ebene hin.

2.

Zur näheren Bestimmung der Verwandtschaft, welche in der angegebenen Weise die unendlich fernen Geraden eindeutig und wechselseitig einander zuordnet, führen uns die folgenden Ueberlegungen.

Alle die Flächen zweiter Ordnung, welche durch eine cubische Raumcurve sich legen lassen, bilden eine lineare Mannigfaltigkeit 2. Stufe*. Greifen wir nun von den ∞^4 Kugeln,

*) Vgl. für das Folgende und später die Aufsätze Herrn Reyes in Crelles Journal Bd. 82, sowie seine Geometrie der Lage, 3. Aufl., II. und III. Abth., Lpz. 1892.

die im Raume existiren, irgend eine heraus, so bestimmt diese mit dem genannten Flächennetz zusammen eine lineare Mannigfaltigkeit 3. Stufe, ein «Flächengebüsch», und alle Flächen zweiter Ordnung, die dem Gebüsche angehören, gehen durch die 6 Punkte hindurch, in denen die Raumcurve die Kugel schneidet. Umgekehrt gehören aber auch alle Flächen zweiter Ordnung, die diese 6 Punkte enthalten, zu dem Flächengebüsche, insbesondere also die 10 Ebenenpaare, die sich durch die genannten Punkte hindurchlegen lassen. Letztere sind die einzigen zerfallenden Flächen des Gebüsches.

Lassen wir die Kugel, die mit der Raumcurve zusammen das Gebüsch bestimmte, variiren, so erhalten wir immer neue Flächengebüsche, und diese sind alle, wie wir auch die erzeugende Kugel wählen mögen, in einem linearen Systeme 7. Stufe enthalten. Addirt man die Gleichungen von 5 beliebigen Kugeln und von 3 beliebig durch die Raumcurve gelegten Flächen zweiter Ordnung, nachdem sie mit willkürlichen Parametern multiplicirt sind, so erhält man die Gleichung dieses Systems 7. Stufe oder einer beliebigen Fläche des Systems. Dasselbe begreift in sich alle Flächen des durch die Raumcurve bestimmten Netzes, sowie die sämtlichen Kugeln des Raumes samt allen den Flächen, die mit je zwei dieser Flächen in einem Büschel liegen. Zerfällt eine Fläche dieses Systems in zwei Ebenen, so sind diese Ebenen conjugirt und gehen durch zwei conjugirte unendlich ferne Gerade. Und alle Ebenenpaare, welche die Raumcurve in 6 Punkten einer Kugel treffen, sind zerfallende Flächen dieses Systems.

Das Curvensystem, in dem eine beliebige Ebene dies Flächensystem schneidet, ist gleichfalls von der 7. Stufe und lässt sich linear aus den Schnittlinien der Ebene mit denjenigen Flächen erzeugen, welche bei der Erzeugung des Flächensystems zugrunde gelegt wurden. Nur für die unendlich ferne Ebene wird das Schnittsystem ein solches der 3. Stufe, weil die ∞^4 Kugeln des Raumes alle durch einen und denselben imaginären Kreis, der in dieser Ebene

liegt, hindurch gehen, und es lässt sich dieses Curvensystem linear erzeugen aus dem unendlich fernen Kugelkreis und drei Kegelschnitten, in denen die unendlich ferne Ebene drei beliebig durch die Raumcurve gelegte Flächen zweiter Ordnung schneidet. Diese Schnittcurven sind bei der räumlichen Hyperbel alle dem Dreieck umschrieben, das die unendlich fernen Curvenpunkte bilden. Die zerfallenden Kegelschnitte des linearen Curvensystems bestehen aus je zwei Geraden, nach denen die Ebenen zweier conjugirter Schaaren hinlaufen; diese Geraden sind also selbst zu einander conjugirt in der Geradenverwandtschaft der unendlich fernen Ebene, deren Ableitung wir uns zur Aufgabe stellten.

Haben wir nun diese Verwandtschaft wirklich gefunden, so ist es leicht zu überblicken, wie sie zur Bestimmung der Kugeln hinleitet, welche die Raumcurve in einem oder mehreren Punkten in irgendwelchem Grade berühren. Wenn nämlich zwei Ebenen, deren unendlich ferne Geraden conjugirt sind, die Raumcurve nicht in 6 discreten Punkten schneiden, wenn vielmehr von diesen Schnittpunkten zwei oder mehr in 1 Punkt zusammenfallen, so wird die Raumcurve in diesem Punkte von einer Kugel berührt oder osculirt, die ausser ihm die übrigen Schnittpunkte des Ebenenpaares und der Raumcurve enthält.

Allgemein bestimmen diese Schnittpunkte, wie bereits gesagt, ein lineares System 3. Stufe von Flächen zweiter Ordnung, unter denen eine und nur eine Kugel vorkommt. Haben wir nun die Gleichung der Kugel für beliebige 6 solche Punkte abgeleitet, so wird es ein Leichtes sein, auch die Spezialfälle in Rechnung zu ziehen, in denen die Kugel und die Raumcurve sich ein- oder mehrfach berühren, osculiren oder hyperosculiren.

Setzten wir die Curvengleichungen in ihrer allgemeinen Form voraus, so würden die erforderlichen Rechnungen bald recht verwickelt werden. Um möglichste Einfachheit zu erzielen, scheint es daher ratsam, uns auf eine spezielle Gleichungsform zu beschränken, die allerdings nur für den

Fall der räumlichen Hyperbel, d. h. einer cubischen Raumcurve mit drei reellen, getrennten unendlich fernen Punkten, Geltung hat.

3.

Sind A, B, C, A', B', C' lineare Funktionen der Punktcoordinaten x, y, z, so stellen die Gleichungen

$$A - tA' = 0, \ B - tB' = 0, \ C - tC' = 0,$$

in denen t einen variabelen Parameter bezeichnet, drei projektive Ebenenbüschel dar. Die homologen Ebenen dieser Büschel schneiden sich bekanntlich in den Punkten einer cubischen Raumcurve, und ihre Achsen sind Sehnen der Curve. Die letztere wird ebenso dargestellt durch die Gleichungen, welche wir aus den ursprünglichen erhalten, indem wir sie dreimal mit willkürlichen Constanten multiplicirt zu einander addiren. Wir erhalten mit den neuen Büscheln dann auch neue Büschelachsen, die wieder Sehnen der Raumcurve sind, und die letztere wird aus allen ihren Sehnen durch projektive Ebenenbüschel projicirt.

Um nun die Gleichungen der Raumcurve in möglichst einfacher Form zu erhalten, wird man drei besonders ausgezeichnete Sehnen zu Achsen der sie erzeugenden Ebenenbüschel wählen. Gesetzt nun, die Curve sei eine räumliche Hyperbel, so nehmen wir zu solchen Achsen ihre drei unendlich fernen Sehnen, und weiter setzen wir ein Coordinatensystem voraus, dessen Ursprung auf der Curve liegt und dessen Achsen nach den unendlich fernen Curvenpunkten hinlaufen. Dann sind die Coordinatenebenen entsprechende Ebenen der drei erzeugenden Büschel, und wir können sie mit drei anderen Ebenen zusammen, die ihnen bez. parallel sind und sich in einem Curvenpunkte schneiden, zu Grundebenen jener Büschel wählen. Bezeichnet dann X eine lineare Funktion von x allein, ebenso Y von y und Z von z, so sind:

$$X - tx = 0, \ Y - ty = 0, \ Z - tz = 0$$

die Gleichungen der projektiven Büschel; die von ihnen erzeugte räumliche Hyperbel aber lässt sich, wenn wir aus ihnen den variabelen Parameter t eliminiren, durch folgende Doppelgleichung darstellen:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Weiter ergeben sich unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$Yz - Zy = 0$$
$$Zx - Xz = 0$$
$$Xy - Yx = 0,$$

deren linke Seiten wir abkürzend mit F, G und H bezeichnen wollen. Dieselben stellen die drei Cylinder dar, durch welche die Raumcurve aus ihren drei unendlich fernen Punkten projicirt wird und deren Erzeugende den Coordinatenachsen bez. parallel sind. Jede beliebige Regel- oder Kegelfläche, welche die Raumcurve enthält, lässt sich dann durch eine Gleichung von folgender Form darstellen:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\alpha F + \beta G + \gamma H = 0.$$

Suchen wir die Coordinaten eines Curvenpunktes als Funktionen eines Parameters, so schreiben wir die Funktionen X, Y, Z aus wie folgt:

$$X = ax + a_1$$
$$Y = by + b_1$$
$$Z = cz + c_1.$$

Setzen wir dann:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = t,$$

so wird einfach:

$$x = \frac{a_1}{t - a}, \; y = \frac{b_1}{t - b}, \; z = \frac{c_1}{t - c}.$$

Die Ebenen

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

und

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$$

schneiden sich in einer Sehne der Raumcurve. Die zweite geht nämlich durch dieselben zwei Curvenpunkte, welche die erste ausser dem Coordinatenursprung enthält, da für Punkte der Curve die Ausdrücke X, Y und Z den Coordinaten x, y und z bez. proportional werden. Die Grössen λ, μ und ν, deren Verhältnisse eine Sehne eindeutig bestimmen, wollen wir künftig als die Coordinaten der Sehne in der Sehnencongruenz bezeichnen und die Sehne selbst durch das Symbol $(\lambda\mu\nu)$ darstellen.

Suchen wir die Parameter der beiden Curvenpunkte, welche auf der Sehne $(\lambda\mu\nu)$ liegen, zu ermitteln, so haben wir in der Gleichung

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

x, y und z durch t auszudrücken und erhalten zunächst:

$$\frac{\lambda a_1}{t - a} + \frac{\mu b_1}{t - b} + \frac{\nu c_1}{t - c} = 0$$

und weiter, wenn wir auflösen und zur Abkürzung setzen:

$$R = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1$$
$$S = \lambda a_1 (b + c) + \mu b_1 (c + a) + \nu c_1 (a + b)$$
$$T = \lambda a_1 bc + \mu b_1 ca + \nu c_1 ab,$$

die folgende quadratische Gleichung:

$$Rt^2 - St + T = 0.$$

Die Discriminante derselben ist:

$$D = S^2 - 4RT$$

oder:

$$D = a_1^2 (b-c)^2 \lambda^2 + b_1^2 (c-a)^2 \mu^2 + c_1^2 (a-b)^2 \nu^2$$
$$- 2 a_1 (b-c) b_1 (c-a) \lambda\mu - 2 a_1 (b-c) c_1 (a-b) \lambda\nu$$
$$- 2 b_1 (c-a) c_1 (a-b) \mu\nu.$$

Die Sehne $(\lambda\mu\nu)$ verbindet zwei reelle oder zwei imaginäre Curvenpunkte und ist eine eigentliche oder uneigentliche

Sehne, je nachdem $D > 0$ oder $D < 0$ ist; sie geht, wenn

$$D = 0,$$

in eine Tangente der Curve über. Im letzteren Falle ist der Berührungspunkt der Tangente durch die Gleichung bestimmt:

$$t = \frac{1}{2}\frac{S}{R} = 2\frac{T}{S}.$$

Sind nun umgekehrt t_1 und t_2 die Parameter zweier Curvenpunkte und wollen wir die Sehne finden, die letztere verbindet, so erhalten wir zunächst:

$$t_1 + t_2 = \frac{S}{R},\ t_1 t_2 = \frac{T}{R}$$

und daher:

$$R\,(t_1 - a)\,(t_2 - a) = Ra^2 - Sa + T = -\lambda a_1\,(c - a)\,(a - b).$$

Ebenso:

$$R\,(t_1 - b)\,(t_2 - b) = -\mu b_1\,(a - b)\,(b - c)$$
$$R\,(t_1 - c)\,(t_2 - c) = -\nu c_1\,(b - c)\,(c - a).$$

Hieraus folgt, wenn ρ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet:

$$(s)\begin{cases} \rho\lambda = \dfrac{b - c}{a_1}\,(t_1 - a)\,(t_2 - a) \\[2mm] \rho\mu = \dfrac{c - a}{b_1}\,(t_1 - b)\,(t_2 - b) \\[2mm] \rho\nu = \dfrac{a - b}{c_1}\,(t_1 - c)\,(t_2 - c). \end{cases}$$

Insbesondere ergiebt sich für die Coordinaten λ, μ, ν der Tangente im Curvenpunkte, dessen Parameter t ist:

$$\rho\lambda = \frac{b - c}{a_1}\,(t - a)^2,\ \rho\mu = \frac{c - a}{b_1}\,(t - b)^2,\ \rho\nu = \frac{a - b}{c_1}\,(t - c)^2.$$

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$U = \lambda ax + \mu by + \nu cz + \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1$$
$$V = \lambda x + \mu y + \nu z,$$

so dass sich die Ebenen $U=0$ und $V=0$ in der Sehne $(\lambda\mu\nu)$ schneiden, dann wird durch die Gleichung

$$U - Vt = 0$$

irgend eine Ebene dargestellt, die durch die Sehne $(\lambda\mu\nu)$ hindurchgeht, und zwar ist t der Parameter des dritten Punktes, in dem sie die Raumcurve schneidet. Wir können nämlich ihrer Gleichung die Form geben:

$$\lambda (t-a)\, x + \mu\, (t-b)\, y + \nu\, (t-c)\, z = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1,$$

und diese wird befriedigt durch:

$$x = \frac{a_1}{t-a},\ y = \frac{b_1}{t-b},\ z = \frac{c_1}{t-c}.$$

Wird die Sehne insbesondere zur Tangente und lassen wir t mit dem Parameter ihres Berührungspunktes zusammenfallen, so erhalten wir die Gleichung einer Schmiegungsebene der Curve, und zwar, wenn wir die Werte, die λ, μ und ν dann annehmen, in Rücksicht ziehen, in folgender Gestalt:

$$(\sigma)\ \frac{b-c}{a_1}(t-a)^3\, x + \frac{c-a}{b_1}(t-b)^3\, y + \frac{a-b}{c_1}(t-c)^3\, z = d.$$

Hierin ist mit d eine häufig wiederkehrende Constante bezeichnet, die wir in einer der nachstehenden Formen schreiben können:

$$\text{(I)} \qquad d = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{(II)}\ d = a^2 (b-c) + b^2 (c-a) + c^2 (a-b)$$

$$\text{(III)}\ d = bc\, (b-c) + ca\, (c-a) + ab\, (a-b)$$

oder endlich am einfachsten

$$\text{(IV)}\ d = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

4.

Sehen wir λ, μ, ν als homogene Coordinaten eines Punktes in irgend einer Ebene ε an, so wird die Sehne $(\lambda\mu\nu)$ durch diesen Punkt in ε dargestellt oder abgebildet, und die Sehnencongruenz der Raumcurve wird so auf dem ebenen Punktfeld abgebildet*, dessen Träger ε ist. Dieses Punktfeld ist dann gleichzeitig reciprok bezogen auf einen beliebigen der Bündel, durch welche die Sehnencongruenz aus den Punkten der Raumcurve projicirt wird.

Aus den Gleichungen der Sehne $(\lambda\mu\nu)$:

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$$
$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

ergeben sich die Relationen:

$$\rho\lambda = Yz - Zy = F$$
$$\rho\mu = Zx - Xz = G$$
$$\rho\nu = Xy - Yx = H,$$

wenn die Coordinaten x, y, z auf einen beliebigen Punkt der Sehne bezogen werden.

Der Regelfläche:

$$\alpha F + \beta G + \gamma H = 0,$$

deren eine Regelschaar aus Sehnen der Raumcurve besteht, entspricht also in der Ebene ε die Gerade:

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Insbesondere bilden sich die drei Cylinder $F=0$, $G=0$, $H=0$ durch die Seiten des Fundamentaldreiecks ab, auf das sich die Coordinaten in der Ebene ε beziehen, und die Eckpunkte desselben entsprechen den unendlich fernen Sehnen der räumlichen Hyperbel.

---

*) Man vgl. für das Folgende den 24. und 25. Vortrag im zweiten Bande von Herrn Reyes Geometrie der Lage, 3. Aufl.

Die Bilder der Kegel, durch welche die Raumcurve aus ihren Punkten projicirt wird, sind in der Ebene ε die Tangenten eines Kegelschnittes $\varkappa$. Dieser Kegelschnitt ist das reciproke Gebilde zu dem Ebenenbüschel zweiter Ordnung, der aus einem Curvenpunkte die Tangenten der Raumcurve projicirt. Seine Gleichung ist die folgende:

$$D = 0.$$

Ihre linke Seite ist die Discriminante, welche darüber entscheidet, ob eine Sehne eigentliche oder uneigentliche ist oder im Grenzfalle zur Tangente der Raumcurve wird (S. 10). Durch die Punkte desselben Kegelschnittes $\varkappa$ stellen sich also die Tangenten der Raumcurve dar, und eine Sehne schneidet die Curve in zwei reellen oder conjugirt imaginären Punkten, je nachdem ihr Bildpunkt ausserhalb oder innerhalb $\varkappa$ liegt. Eine Regelschaar der Congruenz enthält zwei reelle oder imaginäre Tangenten der Raumcurve, je nachdem ihre Bildgerade den Kegelschnitt $\varkappa$ schneidet oder nicht. Zwei Sehnen sind bezüglich der Raumcurve conjugirt, wenn ihre Bildpunkte es in Bezug auf $\varkappa$ sind.

Aus den oben gegebenen Ausdrücken für λ, μ, ν, die vom zweiten Grade in x, y und z sind, ergiebt sich sofort, dass einer beliebigen Curve $n$ter Ordnung in ε eine Schaar von Sehnen entspricht, die auf einer Regelfläche $2n$ter Ordnung liegen.

Suchen wir beispielsweise den Ort der Sehnen, die in den Ebenen eines beliebigen Büschels enthalten sind, d. h. eine Gerade, die Achse des Büschels, schneiden, so haben wir nur aus den Gleichungen der Ebenen, welche diesen Büschel, und denjenigen, welche die Sehne bestimmen, die Variabelen x, y, z zu eliminiren und erhalten so eine Gleichung zweiten Grades in den Grössen λ, μ, ν. Die genannten Sehnen liegen also auf einer Fläche vierter Ordnung, und ihre Bilder in ε sind die Punkte eines Kegelschnittes.

Ist insbesondere der Büschel ein solcher von parallelen

Ebenen und stellen wir deren unendlich ferne Gerade durch zwei Gleichungen dar:

$$\begin{aligned} ax + \beta y + \gamma z + \delta &= 0 \\ ax + \beta y + \gamma z &= 0, \end{aligned}$$

so erhalten wir die Gleichung

$$(\varphi) \quad \alpha \frac{b-c}{\lambda} + \beta \frac{c-a}{\mu} + \gamma \frac{a-b}{\nu} = 0$$

des correspondirenden Kegelschnittes, indem wir aus den obenstehenden Gleichungen und denen der Sehne $(\lambda\mu\nu)$ x, y, z eliminiren in dem Sinne, wie man mit unendlichen Grössen rechnet.

Lassen wir α, β und γ variiren, so erhalten wir nach und nach die sämtlichen Kegelschnitte eines Netzes, und dieselben sind, wie sich sofort zeigt, alle dem Fundamentaldreieck umschrieben. Laufen die Ebenen des Büschels einer Coordinatenebene parallel, so zerfällt der entsprechende Kegelschnitt des Netzes in zwei Seiten des Fundamentaldreiecks. Er zerfällt auch dann, wenn die Ebenen des Büschels einer Coordinatenachse parallel sind, und zwar in eine Seite des Fundamentaldreiecks und eine Gerade durch den gegenüberliegenden Eckpunkt.

Drei Sehnen, die in einer Ebene liegen, stellen sich aber in ε als 3 Punkte dar, welche ein dem Kegelschnitt $\varkappa$ umschriebenes Dreieck bilden. Deswegen bestimmen die Sehnendreiecke, welche in parallelen Ebenen liegen, in ε eine Schaar von Dreiecken, die $\varkappa$ gleichzeitig umschrieben und einem anderen Kegelschnitte einbeschrieben sind. Die Punkte, in denen die Seiten dieser Dreiecke die Curve $\varkappa$ berühren, sind die Bilder der Tangenten, welche wir in den Eckpunkten des zugehörigen Sehnendreiecks an die Raumcurve legen.

Die Ebene ε enthält nicht nur die Abbildung der Sehnencongruenz der Raumcurve, sondern sie ist auch mit der unendlich fernen Ebene durch eine eindeutige quadratische

Punktverwandtschaft verknüpft. Einerseits nämlich ist in ε ein Netz von Kegelschnitten bestimmt, die alle dem Fundamentaldreieck umschrieben sind, und die Punkte derselben entsprechen den Sehnen, die je eine unendlich ferne Gerade u treffen. Sehen wir die letztere einfach als das dem Kegelschnitte φ entsprechende Gebilde an, so ist dadurch bereits die quadratische Verwandtschaft festgelegt. Die Gleichungen von u und φ lehren dann, dass die Coordinaten ξ, η, ζ des unendlich fernen Punktes, der dem Punkte λ, μ, ν von ε entspricht, durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\rho\xi = (b - c)\,\mu\nu, \quad \rho\eta = (c - a)\,\nu\lambda, \quad \rho\zeta = (a - b)\,\lambda\mu.$$

Umgekehrt wird:

$$\rho\lambda = (b - c)\,\eta\zeta, \quad \rho\mu = (c - a)\,\zeta\xi, \quad \rho\nu - (a - b)\,\xi\eta.$$

Jedem Punkte von ε entspricht eine Sehne und zugleich deren unendlich ferner Punkt, jeder Geraden von ε eine Sehnenschaar, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt, und zugleich die unendlich ferne Curve dieser Fläche.

Der Geraden

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$$

entspricht der unendlich ferne Kegelschnitt

$$\alpha\,\frac{b - c}{\xi} + \beta\,\frac{c - a}{\eta} + \gamma\,\frac{a - b}{\zeta} = 0,$$

der in der That die unendlich ferne Curve der Fläche

$$\alpha F + \beta G + \gamma H = 0$$

ist.

Es sei noch bemerkt, dass sich die Ebene ε ebensogut auch auf eine beliebige Ebene η durch eine quadratische Verwandtschaft beziehen lässt. Denken wir uns aus den Eckpunkten des Dreiecks, in welchen η die Raumcurve schneidet, die letztere durch Kegel projicirt und suchen wir die diesen Kegeln entsprechenden Geraden in ε auf, so ist das Netz der Kegelschnitte, welche sich dem so gefundenen Dreiecke umschreiben lassen, dasjenige, welches der Gesamtheit der Geraden von η correspondirt.

5.

Da wir im Folgenden die Gleichung einer Kugel in schiefwinkligen Coordinaten nötig haben werden, so möge es erlaubt sein, dieselbe an dieser Stelle abzuleiten und einige Bemerkungen hinzuzufügen, welche an diese Darstellungsform anknüpfen.

Seien die schiefwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel mit x_0, y_0, z_0 und ihr Radius mit r bezeichnet, sei ferner der Punkt $(x_0\ y_0\ z_0)$ zum Ursprunge rechtwinkliger Coordinaten ξ, η, ζ gewählt, so geschieht der Uebergang vom ursprünglichen zu diesem Coordinatensystem mit Hülfe der Formeln:

$$\begin{aligned}
\xi &= \alpha_1 (x - x_0) + \alpha_2 (y - y_0) + \alpha_3 (z - z_0) \\
\eta &= \beta_1 (x - x_0) + \beta_2 (y - y_0) + \beta_3 (z - z_0) \\
\zeta &= \gamma_1 (x - x_0) + \gamma_2 (y - y_0) + \gamma_3 (z - z_0),
\end{aligned}$$

und zwischen den Coefficienten gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \qquad & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= \delta_{12} \\
\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \qquad & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 &= \delta_{13} \\
\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \qquad & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= \delta_{23},
\end{aligned}$$

wenn wir mit δ_{12}, δ_{13}, δ_{23} die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die Achsen des schiefwinkligen Coordinatensystems miteinander bilden. Durch die vorstehende Transformation geht aber die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$$

über in die folgende:

$$\begin{aligned}
(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + 2\delta_{12} (x - x_0) (y - y_0) \\
+ 2\delta_{13} (x - x_0) (z - z_0) + 2\delta_{23} (y - y_0) (z - z_0) = r^2,
\end{aligned}$$

und dies ist also die gesuchte Gleichung der Kugel. Wir werden künftighin stets mit φ den Ausdruck

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\delta_{12}xy + 2\delta_{13}xz + 2\delta_{23}yz$$

bezeichnen. Dann schreibt sich die Kugelgleichung ausgerechnet wie folgt:

$$\Phi \equiv \varphi - (lx + my + nz) + p = 0.$$

Hierin ist zunächst

$$p = \varphi_0 - r^2,$$

indem wir mit φ_0 den Ausdruck φ, für die Argumente x_0, y_0, z_0 gebildet, bezeichnen.

Sodann ist weiter:

$$l = 2 (x_0 + \delta_{12} y_0 + \delta_{13} z_0)$$
$$m = 2 (\delta_{12} x_0 + y_0 + \delta_{23} z_0)$$
$$n = 2 (\delta_{13} x_0 + \delta_{23} y_0 + z_0).$$

Die Grössen l, m, n, p lassen sich als nicht homogene Coordinaten der Kugel bezeichnen. Die Grösse p ist ferner die Potenz des Coordinatenursprunges bezüglich der Kugel. Sie wird Null, wenn die Kugel durch den Ursprung geht. Fällt der letztere mit dem Centrum der Kugel zusammen, so wird die Gleichung derselben einfach

$$\varphi = r^2.$$

Die Ebene

$$lx + my + nz = 0$$

ist parallel zur Polare des Ursprunges in Bezug auf die Kugel. Die Polare selbst geht durch den Schnitt der Kugel $\Phi = 0$ mit der anderen

$$\varphi - p = 0.$$

Man findet also ihre Gleichung durch Subtraktion der vorstehenden:

$$\pi \equiv lx + my + nz - 2p = 0.$$

Dann wird der Kegel, den die vom Ursprung an die Kugel gehenden Tangenten bilden, durch die Gleichung

$$\Phi - \frac{1}{4p} \pi^2 = 0$$

dargestellt, und insbesondere erhalten wir

$$\varphi = 0$$

als Gleichung des imaginären Kegels, dessen Scheitel im Ursprung liegt und dessen Strahlen nach den Punkten des unendlich fernen Kugelkreises hinlaufen.

Stehen zwei Strahlen, die durch den Ursprung gehen, aufeinander senkrecht, so sind sie bezüglich dieses Kegels conjugirt, und die Bedingung hierfür lautet, wenn x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes des ersten Strahles sind und x', y', z' einem Punkte des zweiten Strahles entsprechen:

$$(x+\delta_{12}y+\delta_{13}z)\,x'+(\delta_{12}x+y+\delta_{23}z)\,y'+(\delta_{13}x+\delta_{23}y+z)\,z'=0.$$

Zwei Kugeln bestimmen einen Kugelbüschel; sind l, m, n, p und l', m', n', p' ihre Coordinaten, so sind die einer beliebigen Kugel des Büschels

$$\frac{l-\lambda l'}{1-\lambda},\quad \frac{m-\lambda m'}{1-\lambda},\quad \frac{n-\lambda n'}{1-\lambda},\quad \frac{p-\lambda p'}{1-\lambda},$$

wenn λ einen reihenden Faktor bedeutet. Die Kugel artet in eine Ebene aus für $\lambda = 1$, und der Büschel lässt sich ebensogut durch diese Ebene und irgend eine Kugel, die ihm angehört, bestimmen. Auf dieser Ebene steht die Gerade senkrecht, welche die Mittelpunkte der den Büschel bildenden Kugeln enthält. Lautet nun die Gleichung der Ebene:

$$(\varepsilon)\quad ux+vy+wz=1$$

und ist die Gleichung in der oben gefundenen Form $\Phi=0$ vorgelegt, setzen wir ferner:

$$\begin{aligned}\xi &= x+\delta_{12}y+\delta_{13}z\\ \eta &= \delta_{12}x+y+\delta_{23}z\\ \zeta &= \delta_{13}x+\delta_{23}y+z,\end{aligned}$$

so gelten, wenn R einen variabelen Parameter bezeichnet, für die Punkte der genannten Geraden die Gleichungen

$$\xi=\frac{1}{2}\,l-Ru,\quad \eta=\frac{1}{2}\,m-Rv,\quad \zeta=\frac{1}{2}\,n-Rw,$$

die für

$$R=\frac{1}{2}\,\frac{Ul+Vm+Wn-2}{Uu+Vv+Ww},$$

wo U, V, W bestimmte lineare Funktionen von u, v, w bedeuten, den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene (ε) liefern.

Diese wenigen Bemerkungen sind vollkommen ausreichend zum Verständnis alles Folgenden.

6.

Um nun die Geradenverwandtschaft im Unendlichen, die uns zu den berührenden Kugeln der räumlichen Hyperbel führt, analytisch darzustellen, verfahren wir wie allgemein, wenn es sich darum handelt, Gebilde auf der unendlich fernen Ebene der Behandlung zugängig zu machen. Wir projiciren die Punkte derselben, am zweckmässigsten aus dem Ursprunge des zugrunde gelegten Coordinatensystems, durch Strahlen, und erhalten so anstatt einer Curve im Unendlichen den Kegel, der sie projicirt, und an Stelle der genannten Verwandtschaft im Unendlichen eine solche zwischen den Ebenen des Bündels, dessen Scheitel der Ursprung ist.

Ein jeder Kegel, dessen Scheitel im Coordinatenanfangspunkt liegt und der dem Asymptotenkegel einer durch die Raumcurve gelegten Fläche zweiter Ordnung congruent und parallel ist, lässt sich durch eine Gleichung von folgender Form darstellen:

$$(\varkappa) \quad \omega_1 xy + \omega_2 xz + \omega_3 yz = 0.$$

Nehmen wir hierzu die Gleichung des imaginären Kegels, welcher vom Ursprung aus den unendlich fernen Kugelkreis projicirt, nämlich die folgende:

$$(\varphi) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2\delta_{12} xy + 2\delta_{13} xz + 2\delta_{23} yz = 0,$$

so erhalten wir als Darstellung des linearen Systems von Kegeln, welches die Fläche (φ) mit den Flächen des durch ($\varkappa$) gegebenen Netzes erzeugt, die folgende Gleichung:

$$\varkappa\,(x_2 + y^2 + z^2) + \varkappa_1 xy + \varkappa_2 xz + \varkappa_3 yz = 0,$$

in der die $\varkappa$ willkürliche Parameter bezeichnen. Jeder zerfallende Kegel dieses Systems besteht nun aus zwei Ebenen, die nach conjugirten Geraden in der von uns betrachteten Verwandtschaft auf der unendlich fernen Ebene hinlaufen. Setzen wir also die vorstehende Gleichung identisch mit

$$UV = 0,$$

wo

$$U = u_1 x + u_2 y + u_3 z$$
$$V = v_1 x + v_2 y + v_3 z,$$

so erhalten wir sofort die Doppelgleichung

$$(A) \qquad u_1 v_1 = u_2 v_2 = u_3 v_3 = \varkappa,^*$$

welche wir als Ausdruck für die Verwandtschaft zwischen den unendlich fernen Geraden ansehen können. Indem wir u_1, u_2, u_3 als die drei ersten homogenen Coordinaten der Ebene $U = 0$ betrachten, während ihre vierte u_4 verschwindet, und entsprechend für $V = 0$, können wir sagen: Die Ebenen U und V sind conjugirt bez. der zerfallenden Ebenenbüschel zweiter Ordnung:

$$(\alpha) \quad u_1^2 - u_2^2 = 0, \; u_1^2 - u_3^2 = 0, \; u_2^2 - u_3^2 = 0$$

und damit bez. aller Ebenenbüschel zweiter Ordnung der Schaar:

$$\rho\,(u_1^2 - u_3^2) + \sigma\,(u_2^2 - u_3^2) = 0$$

oder

$$\rho u_1^2 + \sigma u_2^2 - (\rho + \sigma)\, u_3^2 = 0.$$

Die sechs Achsen a der Ebenenbüschel erster Ordnung, in welche die drei Büschel zweiter Ordnung (α) zerfallen, sind durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$y + z = 0,\; x = 0; \qquad y - z = 0,\; x = 0;$$
$$z + x = 0,\; y = 0; \qquad z - x = 0,\; y = 0;$$
$$x + y = 0,\; z = 0; \qquad x - y = 0,\; z = 0.$$

---

*) Die weiteren sich ergebenden Beziehungen wie $u_1 v_2 + u_2 v_1 = \varkappa_1$ brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da die $\varkappa$ ja willkürlich sind.

Je drei von ihnen liegen auf den vier Ebenen:

$$(\eta_1) \quad x + y + z = 0$$
$$(\eta_2) \quad x + y - z = 0$$
$$(\eta_3) \quad x - y + z = 0$$
$$(\eta_4) \quad -x + y + z = 0,$$

und sie selbst sind nichts als die Halbirungslinien der drei Paar Nebenwinkel, die die Coordinatenachsen miteinander bilden.

Die Coordinaten der Ebenen (η) sind die Lösungen der Doppelgleichung

$$u_1^2 = u_2^2 = u_3^2,$$

und sie befriedigen die Büschelgleichung

$$(\beta) \quad \rho u_1^2 + \sigma u_2^2 - (\rho + \sigma) u_3^2 = 0$$

unabhängig von den Werten, die ρ und σ haben, d. h. diese Ebenen sind sich selbst conjugirt und die gemeinschaftlichen Ebenen der Büschel zweiter Ordnung (β).

Suchen wir nun von einer Ebene durch den Ursprung die conjugirte, die ebenfalls den Ursprung enthält, so bringen wir sie zum Schnitt mit den drei Coordinatenebenen und suchen zu jeder Schnittlinie und den beiden Achsen a, die in der betr. Coordinatenebene liegen, den vierten harmonischen Strahl. Die drei Strahlen, die wir so erhalten, liegen auf der gesuchten conjugirten Ebene.

Wenn eine Ebenenstellung mit ihrer entsprechenden zusammenfällt, so fallen auch die zwei conjugirten Schaaren von Kreisen zusammen, die in beiden liegen, und die Fläche, der sie angehören, wird ein Umdrehungshyperboloid. So gelangen wir zu dem zuerst von Herrn Cremona*) aufgestellten Satze, dass sich durch eine räumliche Hyperbel vier reelle Rotationshyperboloide legen lassen. Die Asymptotenkegel dieser Flächen sind congruent und parallel den vier Rota-

*) Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée. Cr. J. B. 63, S. 141.

tionskegeln, welche sich dem Dreikant der Coordinatenachsen umschreiben lassen. Ihre Rotationsachsen stehen ferner senkrecht auf den Kreisebenen der zugehörigen Fläche. Die letzteren sind aber parallel den Doppelebenen (η), die sich höchst einfach construiren lassen. Die Normalen auf ihnen im Ursprung sind dann die Achsen der Rotationskegel. Wir können dieselben aber auch leicht direkt finden wie folgt: Zwei sich schneidende Strahlen haben immer zwei Symmetrieebenen, deren Punkte von beiden gleich weit abstehen; diese Ebenen stehen auf der Ebene der Strahlen senkrecht und gehen durch die Halbirungslinien der von ihnen gebildeten Winkel. Construiren wir nun zu den Coordinatenachsen die drei Paar Symmetrieebenen, so schneiden sich diese sechs Ebenen zu je dreien in vier Strahlen und diese vier Strahlen sind die gesuchten Achsen der Rotationskegel. Die Normalebenen auf diesen Achsen im Ursprung sind dann wieder die Ebenen η.

Es sei gestattet, die wirkliche Ableitung der durch die räumliche Hyperbel gehenden Rotationsflächen in Gestalt einer Anmerkung zu geben.

Die Gleichungen der Rotationskegel, welche dem Coordinatendreikant umschrieben sind, haben die Form:

$$\varphi - (\pm x \pm y \pm z)^2 = 0.$$

Rechnen wir die vorstehende Gleichung aus, so erhalten wir je nach der Wahl der Vorzeichen die folgenden vier Fälle:

$$\begin{aligned}
(1 - \delta_{12})\, xy + (1 - \delta_{13})\, xz + (1 - \delta_{23})\, yz &= 0 \\
(1 - \delta_{12})\, xy - (1 + \delta_{13})\, xz - (1 + \delta_{23})\, yz &= 0 \\
-(1 + \delta_{12})\, xy + (1 - \delta_{13})\, xz - (1 + \delta_{23})\, yz &= 0 \\
-(1 + \delta_{12})\, xy - (1 + \delta_{13})\, xz + (1 - \delta_{23})\, yz &= 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen müssen nun bezüglich der Glieder zweiten Grades mit den Gleichungen der Rotationshyperboloide übereinstimmen. Vergleichen wir sie mit der allgemeinen Form, in der sich die Gleichung einer durch die

Raumcurve gehenden Fläche zweiter Ordnung darbietet, und ziehen hieraus die Werte der Parameter α, β, γ, welche die letztere bestimmen, so erkennen wir, dass die Gleichungen der Geraden, welche in der Ebene ε die Rotationshyperboloide abbilden, die folgenden sind:

$$\frac{1-\delta_{23}}{b-c}\lambda+\frac{1-\delta_{13}}{c-a}\mu+\frac{1-\delta_{12}}{a-b}\nu=0$$

$$\frac{1-\delta_{23}}{b-c}\lambda-\frac{1+\delta_{13}}{c-a}\mu-\frac{1+\delta_{12}}{a-b}\nu=0$$

$$-\frac{1+\delta_{23}}{b-c}\lambda+\frac{1-\delta_{13}}{c-a}\mu-\frac{1+\delta_{12}}{a-b}\nu=0$$

$$-\frac{1+\delta_{23}}{b-c}\lambda+\frac{1+\delta_{13}}{c-a}\mu+\frac{1-\delta_{12}}{a-b}\nu=0.$$

Die sechs Schnittpunkte derselben sind, wie man sofort einsieht, paarweise conjugirt in Bezug auf je zwei Seiten des Fundamentaldreiecks.

7.

Wir erwähnten bereits, dass sich die Sehnen der räumlichen Hyperbel zu Tripeln sondern, so dass eine Kugel, die durch die Endpunkte von zwei Sehnen eines Tripels geht, auch die Endpunkte der dritten enthält. Stellen wir uns nunmehr die Aufgabe, die Gleichungen zu suchen, welche die Coordinaten $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$, $\lambda''\mu''\nu''$ dreier Sehnen eines Tripels miteinander verknüpfen. Wir wollen die Parameter, welche den Endpunkten der Sehne $(\lambda''\mu''\nu'')$ entsprechen, mit t und t' bezeichnen. Dann wird die Gleichung der Ebene, welche die Sehne $(\lambda\mu\nu)$ mit dem Curvenpunkte t verbindet:

$$U\equiv(t-a)\lambda x+(t-b)\mu y+(t-c)\nu z-(\lambda a_1+\mu b_1+\nu c_1)=0,$$

und ebenso stellt die Gleichung:

$$V'\equiv(t'-a)\lambda' x+(t'-b)\mu' y+(t'-c)\nu' z-(\lambda' a_1+\mu' b_1+\nu' c_1)=0$$

die Ebene dar, welche die Sehne $(\lambda'\mu'\nu')$ und den Punkt t'

enthält. Beide Ebenen müssen aber nach conjugirten Geraden der unendlich fernen Ebene hinlaufen. Die Doppelgleichung (A) der vorigen Nummer liefert dann sofort:

$$(t-a)(t'-a)\lambda\lambda' = (t-b)(t'-b)\mu\mu' = (t-c)(t'-c)\nu\nu'.$$

Nennen wir ρ den Wert der Glieder dieser Doppelgleichung und setzen dann zur Abkürzung:

$$\mathrm{P} = \frac{b-c}{\lambda\lambda'} + \frac{c-a}{\mu\mu'} + \frac{a-b}{\nu\nu'}$$

$$\Sigma = \frac{b^2-c^2}{\lambda\lambda'} + \frac{c^2-a^2}{\mu\mu'} + \frac{a^2-b^2}{\nu\nu'}$$

$$\mathrm{T} = abc\left[\frac{b-c}{\lambda\lambda' a} + \frac{c-a}{\mu\mu' b} + \frac{a-b}{\nu\nu' c}\right],$$

so wird zunächst:

$$\rho = \frac{d}{\mathrm{P}},$$

wo wieder (vgl. S. 12)

$$d = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

ist. Ferner erhält man:

$$t + t' = \frac{\Sigma}{\mathrm{P}},\quad tt' = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{P}};$$

t und t' sind also die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\mathrm{P}t^2 - \Sigma t + \mathrm{T} = 0.$$

In die obenstehende Doppelgleichung wollen wir mit Hülfe der Gleichungen (s) auf Seite 11 statt t und t' die Sehnencoordinaten λ'', μ'', ν'' einführen. Dann ergiebt sich die wichtige und höchst einfache Beziehung:

$$(B)\ \frac{a_1}{b-c}\lambda\lambda'\lambda'' = \frac{b_1}{c-a}\mu\mu'\mu'' = \frac{c_1}{a-b}\nu\nu'\nu'' = \sigma.$$

Die Coordinaten von einer der drei Sehnen können, abgesehen von einem unbestimmten Faktor, aus dieser Doppelgleichung berechnet werden, wenn die anderen beiden Sehnen gegeben sind.

Die Coordinaten der Kugel, welche durch die Endpunkte der drei Sehnen geht, müssen sich offenbar durch die Coordinaten der letzteren ausdrücken lassen, und wir wollen jetzt an die Aufgabe herantreten, diese Ausdrücke wirklich abzuleiten. Zunächst ist klar, dass die Kugel dem System der Flächen zweiter Ordnung angehört, welche die sechs auf den Sehnen liegenden Curvenpunkte enthalten, und dass deswegen die Gleichung der Kugel sich linear aus denen einer beliebigen von diesen Flächen und einer näher zu bestimmenden Ψ, die dem Netze der Raumcurve angehört, zusammensetzen lässt. Nehmen wir zu den Ebenen $U=0$ und $V'=0$ noch die folgenden hinzu:

$$U' \equiv (t-a)\lambda' x + (t-b)\mu' y + (t-c)\nu' z - (\lambda' a_1 + \mu' b_1 + \nu' c_1) = 0,$$
$$V' \equiv (t'-a)\lambda x + (t'-b)\mu y + (t'-c)\nu z - (\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1) = 0,$$

von denen die erste die Sehne $(\lambda'\mu'\nu')$ mit dem Punkte t und die zweite die Sehne $(\lambda\mu\nu)$ mit dem Punkte t' verbindet, so wird durch die Gleichung:

$$UV' + U'V = 0$$

eine Fläche dargestellt, welche durch die Endpunkte der drei Sehnen hindurchgeht. Die Gleichung der Fläche Ψ lässt sich ferner in der Form schreiben:

$$\Psi \equiv \alpha[(b-c)yz + b_1 z - c_1 y] + \beta[(c-a)zx + c_1 x - a_1 z] + \gamma[(a-b)xy + a_1 y - b_1 x] = 0,$$

und der Gleichung der Kugel geben wir dann die Form:

$$UV' + U'V - \Psi = 0.$$

In ihr sind die Grössen α, β, γ noch geeignet zu bestimmen. Entwickeln wir sie, so wird zunächst der Coefficient

von x^2: $2\lambda\lambda'(t-a)(t'-a)$
» y^2: $2\mu\mu'(t-b)(t'-b)$
» z^2: $2\nu\nu'(t-c)(t'-c)$.

Diese Ausdrücke sind aber nach dem Obigen alle einander gleich und ihr gemeinsamer Wert ist

$$\frac{2d}{P}.$$

Soll nun die Gleichung mit der einer Kugel

$$k_1\varphi - (l_1x + m_1y + n_1z) + p_1 = 0$$

identisch sein, so müssen die Coefficienten von xy, xz und yz bez. gleich den Ausdrücken sein:

$$\frac{4d\ \delta_{12}}{P}, \frac{4d\ \delta_{13}}{P}, \frac{4d\ \delta_{23}}{P}.$$

Nun wird beispielsweise der Coefficient von xy:

$$\frac{4d\ \delta_{12}}{P} = 2(\lambda\mu' + \lambda'\mu)\left[ab\,P - \frac{a+b}{2}\Sigma + T\right]\cdot\frac{1}{P} - (a-b)\gamma.$$

Setzen wir in dieser Gleichung die Werte von P, Σ, T ein und bilden wir dann sofort die beiden analogen Gleichungen für α und β, so erhalten wir:

$$\alpha = \frac{1}{P}\left[(\mu\nu'+\mu'\nu)\left(\frac{(c-a)^2}{\mu\mu'}+\frac{(a-b)^2}{\nu\nu'}-\frac{(b-c)^2}{\lambda\lambda'}\right)+4(c-a)(a-b)\,\delta_{23}\right]$$

$$\beta = \frac{1}{P}\left[(\nu\lambda'+\nu'\lambda)\left(\frac{(a-b)^2}{\nu\nu'}+\frac{(b-c)^2}{\lambda\lambda'}-\frac{(c-a)^2}{\mu\mu'}\right)+4(a-b)(b-c)\,\delta_{13}\right]$$

$$\gamma = \frac{1}{P}\left[(\lambda\mu'+\lambda'\mu)\left(\frac{(b-c)^2}{\lambda\lambda'}+\frac{(c-a)^2}{\mu\mu'}-\frac{(a-b)^2}{\nu\nu'}\right)+4(b-c)(c-a)\,\delta_{12}\right].$$

Wir multipliciren nun die Kugelgleichung mit $\frac{1}{2}\sigma P$ durch, wo σ die durch die Gleichung (B) definirte Grösse ist, so dass wir setzen können:

$$\text{(I)}\quad \sigma = \frac{1}{3}\left[\frac{a_1}{b-c}\lambda\lambda'\lambda'' + \frac{b_1}{c-a}\mu\mu'\mu'' + \frac{c_1}{a-b}\nu\nu'\nu''\right].$$

Da wir nun ferner:

$$\sigma P = \lambda'' a_1 + \mu'' b_1 + \nu'' c_1$$

schreiben können, so wird zunächst das absolute Glied in der Kugelgleichung:

$$\text{(II)}\quad p_1 = (\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1)(\lambda' a_1 + \mu' b_1 + \nu' c_1)(\lambda'' a_1 + \mu'' b_1 + \nu'' c_1).$$

Umständlicher ist die Berechnung der Coefficienten $-l_1$, $-m_1$, $-n_1$, von x, y, z. Für $-l_1$ erhalten wir zunächst:

$$-\frac{1}{2}\sigma P\left\{(t+t'-2a)\left[\lambda(\lambda' a_1+\mu' b_1+\nu' c_1)+\lambda'(\lambda a_1+\mu b_1+\nu c_1)\right]+\gamma b_1-\beta c_1\right\}.$$

Hierin ist

$$t + t' = \frac{\Sigma}{P},$$

und für β und γ sind die gefundenen Werte einzusetzen. Schliesslich führen wir die Grössen λ'', μ'' und ν'' ein, und finden dann, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$e = a_1 [a_1 (b + c - 2a) + 2c_1 (a - b) \delta_{13} + 2b_1 (a - c) \delta_{23}]$$
$$f = b_1 [b_1 (c + a - 2b) + 2a_1 (b - c) \delta_{12} + 2c_1 (b - a) \delta_{13}]$$
$$g = c_1 [c_1 (a + b - 2c) + 2b_1 (c - a) \delta_{23} + 2a_1 (c - b) \delta_{12}],$$

für die Coefficienten $- l_1$, $- m_1$ und $- n_1$ von x, y und z die nachstehenden Formeln:

$$\text{(III)} \quad l_1 = e\, \lambda\lambda'\lambda'' + a_1 b_1 (c - a)(\lambda\lambda'\lambda'' + \lambda\mu'\lambda'' + \mu\lambda'\lambda'') - a_1 c_1 (a - b)(\lambda\lambda'\nu'' + \lambda\nu'\lambda'' + \nu\lambda'\lambda'')$$

$$\text{(IV)} \quad m_1 = f\, \mu\mu'\mu'' + b_1 c_1 (a - b)(\mu\mu'\nu'' + \mu\nu'\mu'' + \nu\mu'\mu'') - a_1 b_1 (b - c)(\mu\mu'\lambda'' + \mu\lambda'\mu'' + \lambda\mu'\mu'')$$

$$\text{(V)} \quad n_1 = g\, \nu\nu'\nu'' + a_1 c_1 (b - c)(\nu\nu'\lambda'' + \nu\lambda'\nu'' + \lambda\nu'\nu'') - b_1 c_1 (c - a)(\nu\nu'\mu'' + \nu\mu'\nu'' + \mu\nu'\nu'').$$

Setzen wir endlich:

$$\text{(VI)} \qquad k_1 = d \cdot \sigma,$$

so wird die Gleichung der Kugel:

$$\text{(VII)} \qquad k_1 \varphi - (l_1 x + m_1 y + n_1 z) + p_1 = 0.$$

Einen Augenblick wollen wir noch bei dem gewonnenen Resultate verweilen. Es ist bekannt, dass die analytische Geometrie zu der Theorie der algebraischen Formen d. h. der ganzen, homogenen Funktionen beliebig vieler Variabelen geführt hat. Solche Formen können wir speziell für den Fall dreier Variabelen als Funktionen eines Punktes in der Ebene bezeichnen. Nun stellt es sich als notwendig heraus, zu diesen Funktionen eines Punktes solche von mehreren Punkten zu untersuchen; die einfachsten dieser Art sind die sog. bilinearen, trilinearen u. s. w. In den obigen Ausdrücken haben wir aber solche trilineare Funktionen vor uns. Sehen

wir die λ, μ, ν wieder als Coordinaten eines Punktes in der Ebene an, so können wir weiter sagen, dass sie sich nicht ändern, wenn man die Punkte eines Tripels, von dem wir die Funktion nehmen, beliebig untereinander vertauscht. Sie lassen sich deswegen aus Funktionen dritten Grades eines einzigen Punktes durch den bekannten Prozess der Polarenbildung ableiten. Wir wollen für den Augenblick x_1, x_2, x_3, statt λ, μ, ν, ebenso y_1, y_2, y_3 an Stelle von λ', μ', ν' und z_1, z_2, z_3 für λ'', μ'', ν'' einführen und bedienen uns der gewöhnlichen Schreibweise der Formentheorie. Bilden wir dann die cubischen Formen:

$$k_x^3 = \frac{d}{18}\left(\frac{a_1}{b-c}\,x_1^3 + \frac{b_1}{c-a}\,x_2^3 + \frac{c_1}{a-b}\,x_3^3\right)$$

$$l_x^3 = \frac{e}{6}\,x_1^3 + \frac{a_1}{2}\,(b_1\,(c-a)\,x_1^2x_2 - c_1\,(a-b)\,x_1^2x_3)$$

$$m_x^3 = \frac{f}{6}\,x_2^3 + \frac{b_1}{2}\,(c_1\,(a-b)\,x_2^2x_3 - a_1\,(b-c)\,x_2^2x_1)$$

$$n_x^3 = \frac{g}{6}\,x_3^3 + \frac{c_1}{2}\,(a_1\,(b-c)\,x_3^2x_1 - b_1\,(c-a)\,x_3^2x_2)$$

$$p_x^3 = \frac{1}{6}\,(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3)^3 = \frac{1}{6}\,(u_x)^3,$$

so wird:

$$k = k_xk_yk_z,$$

$$l = l_xl_yl_z,\; m = m_xm_ym_z,\; n = n_xn_yn_z,$$

$$p = p_xp_yp_z = u_x\cdot u_y\cdot u_z.$$

k, l, m, n und p lassen sich als homogene Coordinaten der Kugel ansehen; es kommt dann nur auf die Verhältnisse dieser Grössen an, und dieselben ändern sich nicht, wenn die Verhältnisse der x, sowie der y und z dieselben bleiben, gleichgültig welches ihre absoluten Werte sind.

8.

In den Formeln der vorigen Nummer ist die Lösung des Problems, die mehrfach oder mehrpunktig berührenden Kugeln einer räumlichen Hyperbel zu bestimmen, zum grössten Teile bereits enthalten. Wenn nämlich von den sechs Endpunkten der drei Sehnen, welche dem Punktetripel der Ebene ε entsprechen, i in einen Punkt zusammenfallen, so ist dieser Punkt ein $i-1$ facher Berührungspunkt der Kugel, deren Coordinaten durch die Gleichungen I bis VII gegeben sind. Dies tritt aber entweder dann ein, wenn zwei oder alle drei Sehnen zusammenfallen, und dann vereinigen sich auch zwei oder alle Punkte des entsprechenden Punktetripels in ε, oder es muss mindestens eine Sehne gewissen Bedingungen genügen, so dass ihr Bildpunkt in ε auf einer bestimmten Curve liegt. In beiden Fällen aber behalten die Gleichungen der vorigen Nummer ihre Gültigkeit, so dass es also stets nur auf die Ermittelung der Grössen $\lambda\mu\nu$ oder — was eine passendere Problemstellung ist — die Auffindung der entsprechenden Punkte in ε ankommt, von denen die Coordinaten der Kugeln abhängen.

Nun lassen sich aber 15 Tripel von Sehnen denken, von denen jedes dieselben sechs Punkte der Raumcurve enthält; wir wollen also zunächst die Beziehungen aufsuchen, die zwischen den entsprechenden Punktetripeln der Ebene ε statthaben. Die fünf Sehnen, welche durch einen der sechs Curvenpunkte gehen, stellen sich in ε als fünf Punkte einer Tangente des Kegelschnittes $\varkappa$ dar. Die sämtlichen Punkte also sind die Ecken eines Sechsseites, welches der Curve $\varkappa$ umschrieben ist. Die drei Punkte, in denen sich drei Seiten dieses Sechsseits schneiden, liegen mit den Schnittpunkten der übrigen drei Seiten allemal auf einem Kegelschnitt, so dass wir 10 Kegelschnitte haben, die je 6 unter den 15

Punkten enthalten. Sind drei Sehnen der Raumcurve und ihre Bildpunkte in ε vorgelegt, und suchen wir die Bilder der Sehnen, welche die Endpunkte der ersten zu je zweien verbinden, so brauchen wir von den drei gegebenen Punkten in ε nur die Tangenten an den Kegelschnitt $\varkappa$ zu ziehen und erhalten so das erwähnte Sechsseit und in seinen Eckpunkten die gesuchten Bildpunkte. Aus den 15 Eckpunkten müssen wir uns nun 15 Tripel gebildet denken; jeder der 15 Punkte kommt also in 3 Tripeln vor und die Punkte eines Tripels entsprechen jedesmal drei Sehnen, die zusammen alle sechs auf der Curve angenommenen Punkte enthalten.

Von den sechs Schnittpunkten, die eine Kugel i. A. mit der Raumcurve gemein hat, fallen bei einer dreifach berührenden Kugel je zwei mit den drei Berührungspunkten zusammen. In diesem Falle artet das entsprechende Sechsseit der Ebene ε in zwei einander unendlich nahe rückende Dreiecke aus. Von den 15 Tripeln bleiben dann nur zwei übrig, die aus getrennten Punkten bestehen. Eines davon besteht aus den Eckpunkten des Dreiecks, auf das sich das Sechsseit reducirt, und das andere aus den Punkten, in welchen die Seiten des Dreiecks die Curve $\varkappa$ berühren.

Es ist leicht einzusehen, dass die Berührungspunkte einer dreifach berührenden Kugel in einer Ebene liegen müssen, deren Stellung mit ihrer conjugirten zusammenfällt. Die Schnittpunkte einer solchen Ebene mit der Raumcurve bilden nämlich in der That mit den ihnen unendlich benachbarten Curvenpunkten sechs Punkte einer Kugel, die dann die Raumcurve wirklich dreimal berührt. Die Verbindungslinien dieser drei Berührungspunkte gehören einer von vier Sehnenschaaren an, die in parallelen Ebenen liegen und von denen wir gezeigt haben, dass die Bildpunkte der zugehörigen Sehnen in der Ebene ε je einen Kegelschnitt erfüllen. Wir finden aus der Gleichung (φ) (Seite 15) und den Gleichungen (η) (Seite 22) für die Curven, welche die Bilder der vier Sehnenschaaren sind, die Gleichungen:

$$\frac{b-c}{\lambda}+\frac{c-a}{\mu}+\frac{a-b}{\nu}=0$$
$$\frac{b-c}{\lambda}+\frac{c-a}{\mu}-\frac{a-b}{\nu}=0$$
$$\frac{b-c}{\lambda}-\frac{c-a}{\mu}+\frac{a-b}{\nu}=0$$
$$-\frac{b-c}{\lambda}+\frac{c-a}{\mu}+\frac{a-b}{\nu}=0.$$

Diese vier Kegelschnitte stehen zu einander in der folgenden einfachen Beziehung: Je zwei von ihnen berühren sich in einem Eckpunkte des Fundamentaldreiecks und schneiden sich in den beiden anderen derart, dass ihre Tangenten in jedem dieser Punkte durch zwei Seiten des Fundamentaldreiecks harmonisch getrennt sind.

Construiren wir ein Dreieck, welches einem dieser Kegelschnitte einbeschrieben und der Curve $\varkappa$ umschrieben ist, so sind die Punkte, in denen seine Seiten $\varkappa$ berühren, die Bilder der Tangenten in den Berührungspunkten einer dreifach berührenden Kugel. Für die letzteren selbst ergiebt sich aus dem Vorstehenden der Satz:

(A) **Es giebt vier Schaaren von Kugeln, welche eine räumliche Hyperbel dreifach berühren. Von ihnen gehen acht durch jeden Punkt; ihre Mittelpunkte liegen auf vier (reellen) Geraden. Die vier Kugelschaaren werden von den vier Rotationshyperboloiden umhüllt, die durch die räumliche Hyperbel gehen und deren Achsen jene vier Geraden sind.**

Jede der vier Doppelgeraden der Verwandtschaft im Unendlichen begegnet vier Tangenten der Raumcurve; im Berührungspunkte von jeder dieser Tangenten vereinigen sich aber zwei Berührungspunkte einer Kugel, die zu den dreifach berührenden der Raumcurve gehört. Also:

(B) **Eine räumliche Hyperbel hat 16 Krümmungskugeln, die sie noch in einem anderen Punkte einfach berühren.**

9.

Setzen wir in den Gleichungen der vorletzten Nummer:

$$\lambda'' = \lambda,\ \mu'' = \mu,\ \nu'' = \nu,$$

so wird die Doppelgleichung (B) zu der folgenden:

$$(C)\ \frac{a_1}{b-c}\,\lambda^2\lambda' = \frac{b_1}{c-a}\,\mu^2\mu' = \frac{c_1}{a-b}\,\nu^2\nu',$$

und die Kugel, deren Coordinaten durch die Formeln I bis VI gegeben sind, hat zweimal zwei unendlich benachbarte Punkte mit der räumlichen Hyperbel gemein, d. h. sie berührt dieselbe in den Endpunkten der Sehne $(\lambda\mu\nu)$. Wird diese Sehne insbesondere zur Tangente, d. h. genügen λ, μ und ν der quadratischen Gleichung $D = 0$ (Seite 11), so wird die Kugel eine Krümmungskugel, weil sie im Berührungspunkte der Tangente $(\lambda\mu\nu)$ die Raumcurve vierpunktig berührt. Wir brauchen nun lediglich die Grössen λ, μ, ν durch den Parameter t des Berührungspunktes auszudrücken und dann weiterhin mit Hülfe der obenstehenden Doppelgleichung auch λ', μ', ν' als Funktionen derselben Grösse t, um zu der wirklich ausgeführten Gleichung der Krümmungskugel für einen beliebigen Punkt der räumlichen Hyperbel zu gelangen. Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung, die man erhält, die folgende ist:

$$(a-b)(b-c)(c-a)\,[x^2+y^2+z^2+2\delta_{12}\,xy+2\delta_{13}\,xz+2\delta_{23}\,yz]$$

$$+\Bigg[\frac{(b-c)^2}{a_1}(t-a)^4\left(\frac{b_1^{\,2}}{(t-b)^4}-\frac{c_1^{\,2}}{(t-c)^4}\right)$$

$$+\frac{2a_1}{(t-a)^2}\Big\{(c-a)^2(t-b)^2-(a-b)^2(t-c)^2\Big\}+h\Bigg]x$$

$$+\Bigg[\frac{(c-a)^2}{b_1}(t-b)^4\left(\frac{c_1^{\,2}}{(t-c)^4}-\frac{a_1^{\,2}}{(t-a)^4}\right)$$

$$+\frac{2b_1}{(t-b)^2}\Big\{(a-b)^2(t-c)^2-(b-c)^2(t-a)^2\Big\}+i\Bigg]y$$

$$+\left[\frac{(a-b)^2}{c_1}(t-c)^4\left(\frac{a_1^2}{(t-a)^4}-\frac{b_1^2}{(t-b)^4}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2c_1}{(t-c)^2}\left\{(b-c)^2(t-a)^2-(c-a)^2(t-b)^2\right\}+j\right]z$$
$$-\left[(b-c)(t-a)^2+(c-a)(t-b)^2+(a-b)(t-c)^2\right]^2\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{a_1^2}{b-c}\cdot\frac{1}{(t-a)^4}+\frac{b_1^2}{c-a}\cdot\frac{1}{(t-b)^4}+\frac{c_1^2}{a-b}\cdot\frac{1}{(t-c)^4}\right]=0.$$

Mit h, i, j sind hierin die folgenden Constanten bezeichnet:

$$h=(b-c)\left[a_1(b+c-2a)+c_1(a-b)\delta_{13}-b_1(c-a)\delta_{12}\right]$$
$$i=(c-a)\left[b_1(c+a-2b)+a_1(b-c)\delta_{12}-c_1(a-b)\delta_{23}\right]$$
$$j=(a-b)\left[c_1(a+b-2c)+b_1(c-a)\delta_{23}-a_1(b-c)\delta_{13}\right].$$

Die Bedingung, dass zwei Sehnen $(\lambda\,\mu\,\nu)$ und $(\lambda'\,\mu'\,\nu')$ sich schneiden, findet man aus den zwei Paar Ebenengleichungen, durch welche die beiden sich darstellen lassen, durch Elimination der Punktcoordinaten. Sie lautet:

$$\begin{vmatrix} \lambda' a & \mu' b & \nu' c & \lambda' a_1+\mu' b_1+\nu' c_1 \\ \lambda' & \mu' & \nu' & 0 \\ \lambda a & \mu b & \nu c & \lambda a_1+\mu b_1+\nu c_1 \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Nun sollen λ', μ' und ν' mit λ, μ und ν durch die Doppelgleichung (C) verbunden sein. Dann sind λ', μ', ν' einfachen Funktionen vierten Grades von λ, μ, ν proportional. Die erste und zweite Reihe in obiger Determinante enthält somit Glieder, die vom vierten Grade in λ, μ, ν sind und die Determinante selbst wird vom zehnten Grade in diesen Grössen. Wir erhalten also eine Gleichung zehnten Grades in λ, μ, ν:

$$E=0$$

als Bedingung dafür, dass eine Sehne von ihrer Begleiterin geschnitten wird. Tritt dies aber ein, so wird die Sehne von der doppelt berührenden Kugel in einem Endpunkte osculirt. So ergiebt sich der Satz:

(C) **Es giebt ∞^1 Kugeln, welche eine räumliche Hyperbel in einem Punkte berühren und in einem anderen osculiren. Die Sehnen, auf welchen die**

zugehörigen Punktepaare der Raumcurve liegen, erfüllen eine Regelfläche 20. Ordnung. Die Raumcurve wird in einem beliebigen Punkte von vier dieser Kugeln osculirt und von sechs anderen berührt.*

Die Tangenten der Raumcurve, welche in dieser Regelschaar enthalten sind, entsprechen solchen Punkten der räumlichen Hyperbel, in denen dieselbe von ihrer Krümmungskugel fünfpunktig berührt wird. Der Gleichung 10. Grades $E = 0$ und der quadratischen Gleichung $D = 0$ genügen aber die Coordinaten λ, μ, ν von 20 Tangenten. Also:

(D) **Die räumliche Hyperbel wird von 20 Krümmungskugeln fünfpunktig berührt.**

Lassen wir nun in der Doppelgleichung (C) $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$ und $\nu' = \nu$ werden, so geht sie über in:

$$(D)\ \frac{a_1}{b-c}\lambda^3 = \frac{b_1}{c-a}\mu^3 = \frac{c_1}{a-b}\nu^3.$$

Nennen wir den Wert der Glieder dieser Doppelgleichung θ^3, so sehen wir, dass sie als Wurzeln neun Wertegruppen λ, μ, ν liefert, die sich schreiben lassen wie folgt:

$$\frac{1}{\theta}\lambda = \sqrt[3]{\frac{b-c}{a_1}},\ \frac{1}{\theta}\mu = \varepsilon^i\sqrt[3]{\frac{c-a}{b_1}},\ \frac{1}{\theta}\nu = \varepsilon^k\sqrt[3]{\frac{a-b}{c_1}}.$$

Hierin bedeutet ε eine imaginäre dritte Einheitswurzel, und i und k lassen wir jedes ein vollständiges Restsystem nach dem Modul 3 durchlaufen. Genügen aber die Werte λ, μ, ν der Doppelgleichung (D), so wird die Raumcurve in

---

*) Ist nämlich die Gleichung des Kegels, der die Raumcurve aus irgend einem Punkte auf ihr projicirt (s. Seite 9) $\quad (k)\ \alpha F + \beta G + \gamma H = 0$, so genügen die Coordinaten λ, μ, ν einer Sehne, welche im Scheitelpunkte dieses Kegels von ihrer Begleiterin geschnitten, wird, den zwei Gleichungen:

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0,\ \alpha\frac{b-c}{a_1}\mu^2\nu^2 + \beta\frac{c-a}{b_1}\nu^2\lambda^2 + \gamma\frac{a-b}{c_1}\lambda^2\mu^2 = 0.$$

Im Ganzen aber hat der Kegel (k) mit der Regelfläche $E = 0$ 10 Sehnen der Raumcurve gemein, woraus sich das Gesagte unmittelbar ergiebt.

den Endpunkten der Sehne ($\lambda\mu\nu$) von ein und derselben Kugel osculirt. Wir finden somit:

(E) **Es giebt neun Kugeln, welche die Raumcurve doppelt osculiren.**

Zu einer Kugel, welche die Raumcurve einfach osculirt, können wir auf doppelte Art gelangen. Erstens nämlich liefern die Ebenen, deren Stellung zu der der Schmiegungsebene in irgend einem Curvenpunkte conjugirt ist, je drei Schnittpunkte mit der Raumcurve, welche mit dem Berührungspunkte der Schmiegungsebene zusammen vier Punkte einer osculirenden Kugel bilden. Wir erhalten für jeden Punkt der räumlichen Hyperbel einen Büschel von osculirenden Kugeln, die sich im Krümmungskreise der Curve für den betr. Punkt schneiden.

Zweitens aber können wir den Berührungspunkt (t) einer Tangente mit irgend einem Curvenpunkte (t') durch eine Sehne verbinden und zu dieser Sehne und der Tangente die Begleiterin suchen. Deren Endpunkte mögen die Parameter t'' und t''' haben. Dann sind in die Gleichungen der vorletzten Nummer für λ, μ, ν die nachstehenden Werte einzusetzen:

$$\rho\lambda = \frac{b-c}{a_1}(t-a)^2,\ \rho\mu = \frac{c-a}{b_1}(t-b)^2,\ \rho\nu = \frac{a-b}{c_1}(t-c)^2,$$

ferner für λ', μ' und ν':

$$\rho\lambda' = \frac{b-c}{a_1}(t-a)(t'-a),\ \rho\mu' = \frac{c-a}{b_1}(t-b)(t'-b),$$
$$\rho\nu' = \frac{a-b}{c_1}(t-c)(t'-c).$$

λ'', μ'', ν'' berechnen sich dann aus der Doppelgleichung (B). Wir können auch für λ'', μ'', ν'' ihre Ausdrücke in (B) einsetzen und erhalten dann unmittelbar eine Beziehung zwischen den Parametern t', t'', t''' der Punkte, die eine osculirende Kugel ausser ihrem Berührungspunkt mit der räumlichen Hyperbel gemein hat. Diese Beziehung erlaubt aus einer der Grössen t', t'', t''' die anderen zu berechnen.

Für $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$ geht die osculirende in die Krümmungskugel über; sie wird zur Schmiegungsebene, wenn eine der drei Grössen λ', μ', ν' verschwindet, also $t' = a$, $= b$ oder $= c$ wird.

Die 9 Punkte, welche in ε die 9 Sehnen abbilden, in deren Endpunkten die räumliche Hyperbel von je einer Kugel osculirt wird, bilden die Grundpunkte des folgenden Büschels von Curven dritter Ordnung:

$$\sigma \frac{a_1}{b-c} \lambda^3 + \tau \frac{b_1}{c-a} \mu^3 - (\sigma + \tau) \frac{c_1}{a-b} \nu^3 = 0,$$

indem wir mit σ und τ variabele Parameter bezeichnen.

Zu diesem Büschel gehören die zerfallenden Curven

$$\frac{a_1}{b-c} \lambda^3 - \frac{b_1}{c-a} \mu^3 = 0, \quad \frac{b_1}{c-a} \mu^3 - \frac{c_1}{a-b} \nu^3 = 0, \quad \frac{c_1}{a-b} \nu^3 - \frac{a_1}{b-c} \lambda^3 = 0,$$

deren jede aus drei Geraden besteht, die durch einen Eckpunkt des Fundamentaldreiecks gehen und von denen zwei immer imaginär sind. Zu dem Büschel gehören ferner die Curven

$$a_1\lambda^3 + b_1\mu^3 + c_1\nu^3 = 0$$

und

$$a_1 a\lambda^3 + b_1 b\mu^3 + c_1 c\nu^3 = 0.$$

Wenn eine Kugel, die in den Endpunkten der Sehne $(\lambda\mu\nu)$ die räumliche Hyperbel berührt, die letztere ausserdem in den Endpunkten der Sehne $(\lambda'\mu'\nu')$ schneidet, so besteht nach dem Obigen die Doppelgleichung:

$$(c) \quad \frac{a_1}{b-c} \lambda^2\lambda' = \frac{b'}{c-a} \mu^2\mu' = \frac{c'}{a-b} \nu^2\nu'.$$

Diese Gleichung zeigt aber, dass wir zu einem Punkte $(\lambda_1\, \mu_1\, \nu)$ der Bildebene den begleitenden $(\lambda'\, \mu'\, \nu')$ gewinnen, in dem wir seine geraden Polaren bez. der Curven dritter Ordnung des oben eingeführten Büschels zum Durchschnitt bringen. Die geraden Polaren bilden einen Strahlenbüschel, dessen Scheitel der begleitende Punkt ist. Umgekehrt gehören zu einem Punkte vier andere, für die er Begleiter ist,

nämlich die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels, den seine ersten Polaren bez. der genannten Curven dritter Ordnung bilden. Es gehen also vier Kugeln durch die Endpunkte einer beliebigen Sehne, welche die Raumcurve anderwärts doppelt berühren.

Allgemein endlich erhalten wir die Begleiter von zwei Punkten in dem Durchschnitt der gemischten Polaren dieser Punkte bez. des Büschels von Curven dritter Ordnung.

10.

Gehen wir zurück auf die in der vorigen Nummer aufgestellte Gleichung der Krümmungskugel, denken uns dieselbe rational gemacht und wieder in der Form geschrieben:

$$k\varphi - (lx + my + nz) + p = 0,$$

so erkennen wir sofort, dass k, l, m, n und p ganze Funktionen vom 12. Grade in t sind. Nun wird durch eine lineare Gleichung zwischen diesen fünf Grössen ein Kugelgebüsch dargestellt. Setzen wir in diese lineare Gleichung die Ausdrücke der variabelen Kugelcoordinaten als Funktionen von t ein, so erhalten wir eine Gleichung 12. Grades für t. Also:

(E) **In einem beliebigen Kugelgebüsch sind im Allgemeinen 12 Krümmungskugeln einer räumlichen Hyperbel enthalten. Oder: Eine gegebene Kugel wird von 12 Krümmungskugeln der Hyperbel orthogonal geschnitten. Insbesondere gehen durch einen beliebigen Punkt zwölf Krümmungskugeln.**

Ist das Kugelgebüsch ein symmetrisches, d. h. ist seine Orthogonalkugel eine Ebene, so liegen in dieser Ebene die Mittelpunkte der 12 Krümmungskugeln und es ergiebt sich:

(F) **Die Centren der Krümmungskugeln einer räumlichen Hyperbel liegen auf einer Raumcurve 12. Ordnung.**

Wir erhalten die Coordinaten der Kugel, welche die Curve in einem Punkte (t) osculirt und durch den Ursprung geht, wenn wir in den Formeln auf Seite 28 für λ, μ, ν die Coordinaten der Tangente im Punkte (t) nehmen und ferner, weil hier $t' = \infty$ ist (siehe Seite 32):

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{b-c}{a_1}(t-a) : \frac{c-a}{b_1}(t-b) : \frac{a-b}{c_1}(t-c)$$

setzen. Dann sehen wir, dass k, l, m, n zu ganzen Funktionen 9. Grades von t proportional sind, während p verschwindet. Nun schneidet diese Kugel wie jede osculirende die Schmiegungsebene des Osculationspunktes in einem Krümmungskreise der Raumcurve. Um also die Fläche der Krümmungskreise zu erhalten, haben wir zwischen der Gleichung der Kugel und derjenigen der Schmiegungsebene den Parameter t zu eliminiren. Ordnen wir die Kugelgleichung nach fallenden Potenzen und ebenso die Gleichung der Schmiegungsebene, so sind die Coefficienten in der ersteren quadratische und in der letzteren lineare Funktionen von x, y und z. Bedienen wir uns also des Sylvester'schen Verfahrens der Elimination, so erhalten wir eine verschwindende Determinante von 12 Reihen; die Elemente der drei ersten Reihen sind quadratisch für x, y, z, die der vierten bis zwölften vom ersten Grade in diesen Grössen. Die ganze Determinante ist also vom 15. Grade in x, y, z.

(G) **Die Krümmungskreise einer räumlichen Hyperbel liegen auf einer Fläche 15. Ordnung.**

Die Mittelpunkte der Krümmungskreise erhalten wir, wenn wir vom Centrum einer jeden Osculationskugel ein Lot auf die entsprechende Schmiegungsebene fällen. Die früher berechneten Grössen ξ, η, ζ (s. S. 19) sind lineare Funktionen der Coordinaten dieses Fusspunktes, wenn wir für l, m, n die betr. Funktionen 9. Grades von t einsetzen, denen sie für eine osculirende Kugel proportional werden, und für u, v, w die Coordinaten der Schmiegungsebene, also Funktionen dritten Grades von t. Dann sind auch U, V, W

vom dritten Grade in t, mithin ξ, η, ζ gebrochene Funktionen von t, deren Nenner gemeinsam und vom 6. Grade und deren Zähler vom 15. Grade ist. Also:

(H) **Die Mittelpunkte der Krümmungskreise einer räumlichen Hyperbel liegen auf einer Raumcurve 15. Ordnung.**

Bilden wir die Grössen $\frac{l}{\sigma}$, $\frac{m}{\sigma}$, $\frac{n}{\sigma}$ für eine Kugel, welche die räumliche Hyperbel doppelt berührt, so stellen sie sich als gebrochene Funktionen 6. Grades der Coordinaten λ, μ, ν der Sehne dar, welche ihre Berührungspunkte verbindet. Suchen wir nun den Ort der Mittelpunkte aller doppelt berührenden Kugeln, so haben wir zunächst zu beachten, dass das Aufsuchen der Schnittpunkte dieser Fläche mit einer beliebigen Geraden darauf hinausläuft, die Wertegruppen λ, μ, ν zu bestimmen, welche zwei Gleichungen

$$(f) \quad Al + Bm + Cn + D\sigma = 0$$

und

$$(f') \quad A'l + B'm + C'n + D'\sigma = 0$$

genügen, und wenn wir λ, μ, ν wieder als homogene Coordinaten eines Punktes in der Ebene ε auffassen, so bedeutet dies: wir sollen die Schnittpunkte der durch (f) und (f') dargestellten Curven finden. Nun ist sowohl f wie f', wenn wir uns beide rational gemacht denken, vom 6. Grade in λ, μ, ν. Jede dieser Grössen steigt aber in beiden Gleichungen nur bis zur vierten Potenz auf, und die Coefficienten dieser höchsten Potenz sind in f und f' nur um einen constanten Faktor verschieden. Die beiden Curven besitzen also in den Ecken des Fundamentaldreiecks je einen Doppelpunkt, und die Tangenten in dem letzteren sind für beide Curven dieselben. In jedem Eckpunkt vereinigen sich also sechs Schnittpunkte der beiden Curven. Diese Eckpunkte sind aber unserer Aufgabe offenbar fremd; es bleiben also nur noch die übrigen 18 Schnittpunkte der beiden Curven zu berücksichtigen. Somit ergiebt sich:

(I) Die Mittelpunkte der Kugeln, welche eine räumliche Hyperbel doppelt berühren, liegen auf einer Fläche 18. Ordnung.

Diese Fläche geht durch die vier Geraden, welche die Mittelpunkte der dreifach berührenden Kugeln enthalten, dreimal hindurch; sie hat ferner eine Schneide, deren Punkte die Centren der einmal berührenden und einmal osculirenden Kugeln sind, und zwar scheint diese Curve von der 36. Ordnung zu sein. Die Fläche hat ferner 9 Spitzen, welche Rückkehrpunkte ihrer Schneide, und die Mittelpunkte der doppelt osculirenden Kugeln sind.

Man sieht, wie complicirt die abgeleiteten Flächen und Curven der räumlichen Hyperbel sind. Es bedarf nach dem Entwickelten wohl keiner Erwähnung mehr, dass es ein fruchtloses Beginnen wäre, wenn man diese abgeleiteten Gebilde nun wirklich analytisch darstellen und auf ihre besonderen Eigenschaften hin untersuchen wollte. Und nur um das eine nachzuweisen, dass dieselben wirklich selbst in den einfachsten Fällen einer algebraischen Raumcurve von so hoher Ordnung und solch verwickelter Gestalt werden, nicht im Glauben, irgendwie wertvolle Resultate zu liefern, haben wir die Untersuchungen bis zu diesem Punkte geführt.

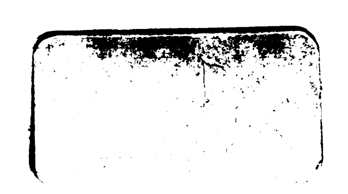
Strassburg i. E., im November 1893.

Vita.

Der Verfasser der vorstehenden Arbeit, Heinrich Emil Timerding, wurde geboren zu Strassburg am 23. Januar 1873. Von Januar 1879 bis August 1881 besuchte er die hiesige Realschule bei St. Johann und von da ab das protestantische Gymnasium, das er im Sommer 1890 mit dem Zeugnis der Reife verliess.

Hierauf studirte er zunächst an der Strassburger Universität Mathematik und Naturwissenschaften; im Wintersemester 1891/92 hielt er sich in München, im Sommersemester 1892 in Freiburg i. B. auf, um dann an die Universität seiner Vaterstadt zurückzukehren.

Allen seinen Lehrern, an deren Übungen und Vorlesungen er während seiner Studienzeit teilgenommen, gestattet er sich an dieser Stelle für das ihm stets erzeigte unverdiente Wohlwollen seinen innigsten Dank auszusprechen, insbesondere aber Herrn Professor Reye für die überaus freundliche Unterstützung dieser seiner Erstlingsarbeit.


Math 8808.94
Uber die kugeln,
Cabot Science
3 2044 091 92